

## 7. Transferts de masse

### Résumé

Nous allons établir la loi de Fick et faire l'analogie entre l'équation de la chaleur et celle de la diffusion. Des applications à des écoulements avec chimie puis avec érosion et sédimentation sont suggérées.

Jusqu'à présent nous n'avons examiné que le cas d'un fluide homogène. Or les fluides peuvent être des mélanges de plusieurs espèces. Par exemple :

- les flammes sont le siège de réactions chimiques exothermiques avec mouvement
- dans un piston on aura un mélange air/ essence qui va réagir (moteur à explosion)...
- dans un réacteur chimique on aura plusieurs espèces qui vont réagir (il s'agit principalement de convection massique forcée)...
- dans une rivière on aura de la vase et des particules en suspension...
- dans une centrale nucléaire on aura des neutrons dans les barres d'Uranium...
- dans les centrales, ou les cocottes minutes, on a de l'eau en ébullition (mélange eau/gaz...)...
- dans la fumée de l'usine on a des polluants (gaz, gouttes ou particules...)...
- dans le panache de l'éruption volcanique il y a des cendres...
- Le Gulf Stream est un exemple de convection thermosolutale : chauffé à l'équateur, se refroidit vers les pôles, il est aussi plus chaud en surface qu'en profondeur, de plus la densité de sel est plus forte en profondeur... la dynamique de l'ensemble est fondamentale pour les modèles de climats...
- ...

Nous allons donc poser les équations dans le cadre de la TPI (thermodynamique des Processus irréversibles) et les simplifier pour justifier la loi de Fick. Nous insisterons sur l'analogie forte entre l'équation de diffusion et l'équation de la chaleur.

### 7.1. Les équations dans le cadre de la TPI.

#### 7.1.1. Conservation des espèces

Dans le cadre la thermodynamique des processus irréversibles il faut introduire un nouvel effet qui est le mélange de plusieurs espèces. Soit  $c_1$  le rapport de la masse d'une des espèces par rapport à l'ensemble des espèces  $c_1 = \rho_1 / \sum \rho_i$ . Bien entendu la somme de toutes les concentrations vaut un :  $\sum c_i = 1$ . Si il n'y a aucun effet de mélange ( $c_1$  distingue certains éléments fluides qui sont en fait strictement identiques aux autres), on a simplement :

$$\frac{\partial \rho c_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho c_1 \underline{u}) = 0$$

c'est à dire le transfert passif. Si maintenant on admet qu'il y a un effet de mélange c'est à dire que les particules ne suivent plus les lignes de courant, il faut

ajouter un nouveau terme de flux  $j_1$  (de diffusion) à l'équation de conservation ainsi qu'un terme de création volumique (par exemple par réaction chimique, ou désintégration radioactive...) :

$$\frac{\partial \rho c_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho c_1 \underline{u} + \underline{j}_1) = w_1$$

Cette équation est la nouvelle équation de conservation. On aura de même une telle équation de conservation pour chaque constituant du mélange.

**Remarque**

Cette relation peut se retrouver en faisant un bilan de masse pour chaque constituant  $c_i$  animé de la vitesse  $\underline{u}_i$  :

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \underline{u}_i) = w_i$$

en posant pour définition de la vitesse barycentrique, et par définition des concentrations :

$$\rho \underline{u} = \sum_{i=1}^n \rho_i \underline{u}_i, \quad c_i = \rho_i / \rho \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^n \rho_i = \rho \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n c_i = 1,$$

l'écart entre la quantité de mouvement de chaque espèce et la vitesse barycentrique permet de construire ce vecteur  $j_i$  qui traduit bien l'écart du mouvement du constituant  $i$  par rapport à la moyenne :

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \underline{u}) + \nabla \cdot \underline{j}_i = w_i, \quad \text{avec} \quad \underline{j}_i = (\rho_i \underline{u}_i - \rho_i \underline{u})$$

La forme de l'équation de la masse pour le constituant écrite avec la concentration :

$$\frac{\partial \rho c_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho c_i \underline{u}) + \nabla \cdot \underline{j}_i = w_i,$$

**7.1.2. Création d'entropie**

Pour simplifier, on suppose dans la suite qu'il n'y a que deux constituants. C'est un "mélange binaire". Après avoir défini les nouvelles équations de conservations, il faut aussi introduire le travail réversible associé. La "thermostatique" nous avait appris qu'il fallait associer à un changement de concentration le potentiel chimique  $\mu$ . Pour l'entropie du mélange de disons 1 et 2, on écrira l'équation habituelle plus le terme de potentiel chimique :

$$ds = \frac{de}{T} - \frac{p}{\rho^2} d\rho - \mu dc.$$

$\mu$  est le potentiel chimique du mélange (il y a deux constituants c'est donc en fait  $\mu_1 dc_1 + \mu_2 dc_2$ , mais  $c_1 + c_2 = 1$ , on pose donc  $c = c_1$ ,  $dc = dc_1$ , et donc  $dc_2 = -dc$ , d'où  $\mu = \mu_1 - \mu_2$ ,  $j_1 + j_2 = 0$ ,  $j = j_1$ ). Il faut ensuite écrire que la création d'entropie est positive. Après manipulation comme déjà vu, cette création d'entropie devient pour la partie vectorielle :

$$-\frac{q - \underline{j}\mu}{T^2} \cdot \nabla T - \frac{\underline{j} \cdot \nabla \mu}{T}$$

### 7.1.3 Flux

On en déduit, dans le cadre du premier gradient :

$$\underline{j} = -\alpha \underline{\nabla} \mu - \beta \underline{\nabla} T,$$

$$\underline{q} = -\delta \underline{\nabla} \mu - \gamma \underline{\nabla} T + \mu \underline{j}.$$

Les conditions de symétrie permettent de poursuivre, si on pose  $\kappa = \gamma - \beta T / \alpha$  :

$$\underline{j} = -\alpha \underline{\nabla} \mu - \beta \underline{\nabla} T,$$

$$\underline{q} = (\mu + \beta T / \alpha) \underline{j} - \kappa \underline{\nabla} T.$$

On peut encore transformer à l'aide de l'énergie libre :

$$df = -s dT + \rho^{-1} dp + \mu dc.$$

en posant  $D = \frac{\alpha}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial c}_{P,T}$ ,  $\frac{\rho k_T D}{T} = \alpha \frac{\partial \mu}{\partial T}_{P,c} + \beta$ ,  $k_p = p \frac{\partial \rho^{-1}}{\partial c}_{P,T} / \frac{\partial \mu}{\partial c}_{P,T}$

Au final :

$$\underline{j} = -\rho D (\underline{\nabla} c + \frac{k_T}{T} \underline{\nabla} T + \frac{k_p}{p} \underline{\nabla} p),$$

$$\underline{q} = (\mu + k_T \frac{\partial \mu}{\partial c}_{P,T} - T \frac{\partial \mu}{\partial T}_{P,c}) \underline{j} - k \underline{\nabla} T.$$

On note qu'il y a des effets croisés : L'effet du flux de matière sur le flux de chaleur est l'effet Dufour  $q(j, \underline{\nabla} T)$ . Le flux thermique entraîne la diffusion de masse, c'est l'effet Soret :  $\underline{j}(\underline{\nabla} c, \underline{\nabla} T)$ . Ces effets sont très souvent négligeables, cependant l'effet Dufour est parfois pris en compte dans les réacteurs chimiques. Attention, l'existence de plusieurs types de constituants modifie la viscosité du fluide dans lequel ils sont introduits. Pour en tenir compte dans le cadre de la TPI, il faut introduire de nouvelles équations de conservation, par exemple une équation portant sur la conservation du moment des constituants. On a alors de nouveaux termes tensoriels à modéliser dans le cadre du premier gradient...

### 7.1.4. Au final

Retenons que l'effet prépondérant est la loi de Fick écrite ici pour un mélange binaire :

$$\underline{j} = -\rho D \underline{\nabla} c,$$

avec  $D$  coefficient de diffusion. On peut en première approximation, si le mélange est très dilué, prendre  $D$  constant et  $\rho$  constant (le fluide porteur conserve alors toutes ses caractéristiques pures :  $\rho$ ,  $\mu$ ,  $k$ ,  $c_p$ ... identiques malgré le mélange).

Application immédiate, l'équation d'évolution du constituant considéré est :

$$\frac{\partial \rho c}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\rho c \underline{u}) + \underline{j}_1 = w_1$$

$$\rho \frac{dc}{dt} - \underline{\nabla} \cdot (\rho D \underline{\nabla} c) = 0.$$

donc :

$$\frac{dc}{dt} - D \underline{\nabla}^2 c = 0.$$

On note que cette équation est strictement identique à l'équation de la chaleur en incompressible lorsque l'on néglige toutes les sources volumiques.

## 7.2. Réactions chimiques

### 7.2.1. Notations

Si les espèces peuvent interagir par réaction chimique, le problème se complique énormément : il y a création (ou disparition) volumique. On écrit la réaction sous la forme ( $\sum$  désigne la somme sur  $i$ ) :

$$\sum v'_i A_i \rightleftharpoons \sum v''_i A_i,$$

et il est bien connu que la vitesse de réaction s'écrit pour l'espèce  $j$  ( $\Pi$  désigne le produit sur  $i$ ,  $M_j$  est la masse molaire de l'espèce  $j$ ) :

$$w_j = M_j (k_{direct} \Pi c_i^{v'_i} - k_{inverse} \Pi c_i^{v''_i})$$

### 7.2.2. Chimie en phase fluide

L'équation de l'espèce  $j$  a donc ce terme source :

$$\frac{dc_j}{dt} - D \nabla^2 c_j = w_j.$$

Il faut construire ensuite l'équation de conservation pour l'énergie, il ne faudra pas y oublier les termes de création volumiques de chaleur par réaction chimique ni les terme de flux des divers constituants (sans oublier que le  $c_p$  sera la somme pondérée des différents  $c_{pj}$ ).

On peut définir un nouveau nombre sans dimensions le " Damköhler" :

$$Da = \frac{\text{temps convectif}}{\text{temps chimique}}.$$

L'équation de la concentration devient (écrite sans dimension) :

$$\frac{d\bar{c}}{dt} - \frac{D}{UL} \bar{\nabla}^2 \bar{c} = Da \bar{w}_a.$$

- Si  $Da \ll 1$ , la réaction est très lente, l'écoulement est "figé", il ne reste que :

$$\frac{d\bar{c}}{dt} - \frac{D}{UL} \bar{\nabla}^2 \bar{c} = 0$$

- Si  $Da \gg 1$ , la réaction est très rapide, l'écoulement est en "équilibre chimique", il ne reste que :  $\bar{w}_a = 0$

Le problème des conditions aux limites est délicat, on le voit au §suivant sur un exemple.

### 2.7.3. Chimie à l'interface fluide/ solide

Examinons le cas d'une réaction chimique qui se produit effectivement uniquement à la surface (pour fixer les idées). Dans le fluide, on a seulement transport et diffusion de la concentration :

$$\frac{d\bar{c}}{dt} - \frac{D}{UL} \bar{\nabla}^2 \bar{c} = 0$$

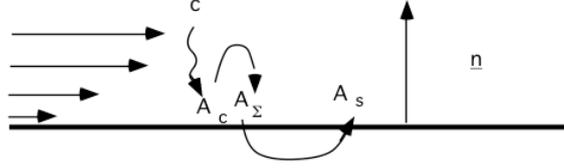
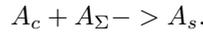


FIG. 1 – Une espèce chimique  $A_c$  de concentration volumique en solution est  $c$  se rapproche de la paroi où sa concentration surfacique est notée  $A_c$ , elle réagit avec une espèce en surface  $A_\Sigma$  pour donner le produit en surface  $A_s$

A la surface, on peut imaginer, pour fixer les idées, qu'il se produit une réaction chimique directe du premier ordre. L'espèce chimique  $A_c$  dont la concentration volumique en solution est  $c$  se rapproche de la paroi où sa concentration surfacique est notée  $A_c$ , elle réagit de manière directe uniquement avec une espèce en surface  $A_\Sigma$  (de jauge  $A_{\Sigma 0}$ ) pour donner le produit en surface  $A_s$  :



la cinétique à la paroi est simplement :

$$\frac{\partial A_s}{\partial t} = -\frac{\partial A_\Sigma}{\partial t} = -\frac{\partial A_c}{\partial t} = k_{direct} A_c A_\Sigma.$$

On peut définir une constante de réaction  $k_D$  telle que  $k_{direct} A_c = k_D c(x, 0)$  ( $k_{direct}$  et  $k_D$  n'ont pas la même dimension car  $A_c$  est surfacique et  $c(x, 0)$  est volumique,  $1/(k_D c(x, 0))$  est le temps caractéristique chimique). Le nombre de particules sortant du fluide (allant vers la paroi) est ( $\underline{n}$  normale extérieure  $-\underline{e}_y$ ) flux de concentration à la paroi :

$$\underline{n} \cdot (-D \underline{\nabla} c) = -\underline{e}_y \cdot (-D \underline{\nabla} c) = D \frac{\partial c}{\partial y},$$

c'est le nombre de particule de "c" en solution passant par unité de temps à la paroi (formant l'espèce fictive  $A_c$ ) et réagissant avec  $A_\Sigma$ , c'est exactement le taux de création de  $A_s$  :

$$\frac{\partial A_s}{\partial t} = D \frac{\partial c}{\partial y},$$

et par la constante de la cinétique du premier ordre :

$$D \frac{\partial c}{\partial y} = k_D c(x, 0) A_\Sigma.$$

On a une expression de type "mixte" liant la dérivée normale et la valeur à la paroi. Le rapport :

$$Da = \frac{\text{temps diffusif}}{\text{temps chimique}} = \frac{L^2/D}{1/(k_D A_{\Sigma 0} L^{-1})}.$$

permet de définir un nouveau nombre de "Damköhler".

- si  $Da \ll 1$ , la réaction chimique est très très lente, alors :

$$\frac{\partial c}{\partial y} = 0.$$

la paroi sera dite "paroi non catalytique", le flux de concentration  $y$  est nul.

- si  $Da \gg 1$ , la réaction chimique est très très rapide, alors  $c = 0$ , la paroi sera dite "paroi totalement catalytique" pour l'espèce considérée, la réaction est totale.

- si  $Da = 0(1)$ , il faut résoudre la chimie pariétale. Remarquons que si  $A_\Sigma$  est très dominant, il varie peu, alors  $k_D A_\Sigma$  est une constante, que l'on peut poser égale à  $h$ , où  $h$  est un coefficient d'échange massique,  $b = h/D$  est un nombre de Biot massique :

$$D \frac{\partial c}{\partial y} = bc.$$

Nous n'en dirons pas plus sur ce sujet des écoulements réactifs... Si ce n'est qu'ils sont importants dans les réacteurs chimiques (!) mais aussi pour l'étude des corps de rentrée (dissociation de l'air entre l'onde de choc et la paroi de la navette...), voire l'explication des taches de couleurs sur la peau des zèbres ou des léopards (réactions chimiques avec diffusion).

### 7.3. Analogie avec la thermique

#### 7.3.1. Équations

On a remarqué l'analogie entre :

$$\frac{dc}{dt} - D\nabla^2 c = 0, \quad \text{et} \quad \frac{dT}{dt} - \frac{k}{\rho c_p} \nabla^2 T = 0, \quad \text{et} \quad \frac{du}{dt} - \nu \nabla^2 \underline{u} = \dots$$

L'équation étant la même, on reprendra certaines conclusions (en gardant à l'esprit les hypothèses de faible concentration et d'incompressibilité, tout comme l'équation de la chaleur ci dessus est valable pour les faibles échauffements et en incompressible), dont celle sur le découplage entre le flot et la diffusion de masse. Les nombres sans dimension sont calqués sur ceux de la thermique : La concentration est sans dimensions... On voit que  $D$  est homogène à  $\nu$ . On pose :

$$S = \frac{\nu}{D}.$$

le nombre de Schmidt (analogue de Prandtl). Il sera aussi d'ordre un dans les gaz. On peut définir un nombre de Péclet massique (Qui sera donc le nombre de Reynolds fois le nombre de Schmidt). On définit aussi le nombre de Lewis :

$$Le = \frac{S}{Pr} = \frac{k}{\rho c_p D}.$$

Le flux de concentration à la paroi permet de définir le nombre de Sherwood (analogue du Nusselt) :

$$Sh = -L \frac{\partial c}{\partial n}.$$

Comme en thermique on pourra donc définir le régime de convection forcée massique qui correspond à l'entraînement par l'écoulement imposé.

#### 7.3.2 Convection forcée massique

Plaçons nous dans le cadre de la mécanique des fluides incompressibles,  
- équations dynamiques

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0$$

$$\rho \left( \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} \right) = -\nabla p + \underline{f} + \mu \nabla^2 \underline{u}.$$

- équation de la chaleur en incompressible

$$\rho \left( \frac{\partial T}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \nabla) T \right) = k \nabla^2 T + 2(\mu \underline{D} : \underline{D}) + r.$$

- équation de bilan de masse

$$\left( \frac{\partial c}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \nabla) c \right) = D \nabla^2 c.$$

Pour les conditions aux limites, soit  $n$  la coordonnée normale à la paroi :  
cas sans transfert de masse à l'interface :

$$\frac{\partial c}{\partial n} = 0.$$

\* cas avec réaction chimique sur une paroi non catalytique (c'est la même chose) :

$$\frac{\partial c}{\partial n} = 0.$$

\* cas avec réaction chimique sur une paroi totalement catalytique (réaction totale) :

$$c = 0.$$

\* cas avec réaction chimique partielle :

$$\frac{\partial c}{\partial n} + bc = 0.$$

### 7.3.3. Convection libre massique

Tout comme il y a convection forcée massique, on peut examiner le cas de la convection libre massique. Donc de même l'adjonction d'un constituant supplémentaire augmente la densité selon :

$$\rho = \rho_0(1 + ac)$$

$a$  coefficient de densification. On pourra construire un nombre de Grashof massique :

$$G_m = \rho_0(ac)gL^3/\nu^2.$$

Et en définissant un excès de pression  $(\delta p)\bar{p}$  :

- équations dynamiques

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0$$

$$\rho \left( \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u} \right) = -(\delta p) \underline{\nabla} \bar{p} + ac \underline{g} + \mu \underline{\nabla}^2 \underline{u}.$$

- équation de bilan de masse

$$\left( \frac{\partial c}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) c \right) = D \underline{\nabla}^2 c.$$

On peut aussi envisager des cas du couplage thermique et massique (convection libre thermosolutale)

$$\rho = \rho_0(1 + ac - \alpha(T - T_0))$$

## 7.4. Problèmes de sédimentation érosion

### 7.4.1. Introduction

Il s'agit du problème général de transport de sédiments (de particules, de sable, d'alluvions de boues, de déchets) dans un écoulement de fluide (d'eau ou d'air). Les écoulements envisagés sont tous ceux liés aux fleuves et à la mer, ou au déplacement des dunes de sable. Les ordres de grandeurs vont des rides de sable sur la plage qui sont de quelques centimètres aux bancs de sable (méga ripples) de plusieurs centaines de mètres sous la Manche. Les dunes du Sahara vont de 5m à plusieurs centaines de mètres.

La complexité vient ici en plus du fait que la présence des particules modifie la viscosité de l'écoulement, mais surtout, que le déplacement des particules modifie le fond de l'écoulement et modifie donc aussi l'écoulement lui même.

On simplifiera en supposant que les sédiments sont emportés comme des scalaires passifs par la couche limite (turbulente) avec en plus une vitesse de chute de sédimentation. On n'étudiera pas ici le problème des avalanches qui est un problème de transport dans un milieu granulaire.

### 7.4.2. Mouvement Brownien/ chute de particules : suspension

Prenons un fluide au repos avec des particules en suspension. Sous l'action des chocs des molécules une particule solide est animée d'un mouvement aléatoire (Brown 1827)... Si les particules sont en plus soumises à une force extérieure, la gravité ( $\underline{g}$ ), à l'état stationnaire, il y a équilibre entre la traînée (force de frottement fluide sur la particule) et le poids. La traînée est la force de Stokes (si la vitesse est faible),  $d$  est le diamètre :

$$F = -6\pi\mu(d/2)v.$$

Soit  $b$  le coefficient de mobilité, si on pose  $b = 1/(6\pi\mu d/2)$ , alors  $\rho c \underline{v} = \rho d b \underline{g}$ . d'où

$$\underline{j} = -\rho D \nabla c + \rho c b \underline{g}.$$

comme le potentiel est  $\mu = T \text{Log}(c) + F(p, T)$  (cas dilué)

$$\underline{j} = -\rho D T^{-1} \nabla \mu + \rho c b \underline{g}.$$

À l'équilibre thermodynamique le flux s'annule, or la condition d'équilibre est  $\mu + E_p = \text{constante}$  ( $E_p$  énergie potentielle), or  $-\nabla \mu = -\underline{g}$ , donc  $D = Tb$ . C'est la relation d'Einstein (1906).

La description n'est pas toujours si simple !

Il est convenu de simplifier au maximum en ne faisant apparaître qu'une vitesse de chute (*settling velocity*). On la notera  $V_f$ . Nous avons donc :

$$V_f = \frac{(\rho_s - \rho)gd^2}{18\mu}$$

Une estimation simpliste de  $V_f$  est souvent présentée sous la forme d'un équilibre entre la traînée aérodynamique (attention ici prise en  $V_f^2$ , Stokes n'étant qu'une approximation à faible vitesse), la poussée d'Archimède et le poids de la particule ( $d$  diamètre,  $c_d$  coefficient de traînée..).

$$V_f = \sqrt{\frac{4(\rho_s/\rho - 1)gd}{3c_d}}.$$

Par la suite nous prendrons cette vitesse comme un des paramètres du problème. On peut cependant imaginer que cette vitesse n'est pas constante, qu'elle varie avec la densité...

### 7.4.3. mise en suspension

Mais le vrai problème est celui de la mise en suspension. Comment des particules qui étaient initialement posées les unes sur les autres vont brusquement sauter en l'air ?

Des arguments du même type que précédemment laissent penser que  $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$  (qui est la contrainte de cisaillement au fond, là où est la particule) provoque la force d'ordre  $\tau d^2$  qui entraîne la particule si elle est d'ordre de grandeur de son poids apparent  $(1/6)(\rho_s/\rho - 1)g\pi d^3$ . On comprend alors l'importance du paramètre de Shields (1936) qui est par définition proportionnel au rapport de ces deux effets :

$$S = \frac{\tau}{(\rho_s - \rho)gd}$$

Expérimentalement on mesure une valeur du paramètre de Shields critique (noté  $S_c$ ) à partir duquel il peut y avoir mise en suspension et déplacement des particules... Ce phénomène a déjà été remarqué par du Boys en 1879 " *un caillou posé au fond d'un courant liquide, peut être déplacé par l'impulsion des filets qui le rencontrent : le mouvement aura lieu si la vitesse est supérieure à une certaine limite (...) [qui] dépend de la densité, du volume et de la forme du caillou ; elle dépend aussi de la densité du liquide.*"

## 7.4. déplacement : flux saturé

Près du fond il existe une couche très fine nommée " *bed load*". Pour la définition de cette "couche de charriage", il y a un problème : il n'y a pas de définition précise... Dans cette couche on a des particules qui se déplacent à une vitesse qui est encore *grosso modo*  $V_f$ , soit  $((\rho_s/\rho - 1)gd)^{1/2}$  ; le flux de particules (noté  $q_s$ ) est environ cette vitesse fois l'épaisseur de l'écoulement qui est une couche de quelques diamètres ( $d$ ). Les corrélations en régime turbulent sont donc faites en utilisant cette échelle de flux.

La loi importante, obtenue à partir de mesurées expérimentales, est celle de Meyer Peter & Müller, donne le flux en fonction de l'écart au seuil du paramètre de Shields :

$$q_s = ((\rho_s/\rho - 1)gd^3)^{1/2} 8 \left( \frac{\tau}{(\rho_s - \rho)gd} - 0.047 \right)_+^{3/2}.$$

Mais il n'existe pas de vrai consensus est des lois de la forme

$$q_s = q_0(S - S_s)^\beta, \quad \text{si } S > S_s, \text{ et sinon : } q_s = 0$$

avec différents  $q_0$ ,  $S_s$  et  $\beta$ , sont utilisées.

## 7.5 Loi de conservation des sédiments

### 7.5.1 Conservation des sédiments

Il nous faut maintenant assembler les différents éléments et écrire une loi de conservation pour les sédiments. Soit  $c$  la concentration en mouvement, l'expres-

sion générale est que la variation est égale au flux et à la création intérieure :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} c dV = \int_{\partial\Omega} \vec{q} \cdot d\vec{S} + s.$$

Il modéliser cette conservation, par exemple, si on suppose que la vitesse des

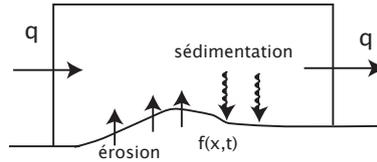


FIG. 2 – La quantité de matériaux en mouvement varie par le flux entrant/sortant l'érosion et la sédimentation.

sédiments en mouvement est la vitesse du fluide plus une vitesse de sédimentation dans le sens de la gravité :  $u, v - V_f$ , et que l'on admet l'existence d'un courant de diffusion satisfaisant à la loi de Fick, l'équation de conservation de la masse peut s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} c + u \frac{\partial}{\partial x} c + (v - V_f) \frac{\partial}{\partial y} c = \frac{\partial}{\partial x} D \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} D \frac{\partial c}{\partial y}.$$

où  $D(c)$  et  $V_f(c)$  sont données...

Le flux à la paroi donne la variation du sol  $f(x)$  :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial c}{\partial y} \Big|_0 + V_f c \Big|_0.$$

sous l'action de la déposition  $V_f c \Big|_0$  et de l'érosion  $D \frac{\partial c}{\partial y} \Big|_0$ . Il faut enfin se donner une loi d'érosion sous la forme :

$$-D \frac{\partial c}{\partial y} \Big|_0 = Q_0 \left( \left( \frac{\tau - \tau_s}{(\rho_s - \rho) g d} \right)_+ \right)^\beta, \quad \beta = 3/2$$

la notation " + " représente la valeur positive et 0 sinon. C'est ce système qu'il faudrait résoudre

### 7.5.2 Résolution couplée

Se donnant une première forme de fond  $f(x, t = 0)$ , on doit suivre la démarche suivante :

- calcul de l'écoulement par résolution des équations de Navier Stokes incompressibles avec une viscosité corrigé de la présence des sédiments en solution
- calcul du transport des sédiments
- actualisation du fond.

On voit qu'il s'agit d'un problème très fortement couplé. Il peut être simplifié en supposant que le temps d'évolution de la topographie est bien plus long que le temps hydrodynamique, que la viscosité ne varie pas avec la concentration.

### 7.5.3 Equation intégrale simplifiée pour le milieu granulaire

On peut en considérer une version intégrale ou globale de la loi de conservation. Soit la quantité intégrale  $n$  qui représente  $\int_0^\infty c dy$ ,  $q$  représente le flux total en mouvement  $\int_0^\infty c u dy$ , on identifie la déposition à  $\dot{n}_d = V_f c|_0$  et l'érosion à  $\dot{n}_e = -D \frac{\partial c}{\partial y}|_0$ , d'où :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\dot{n}_d + \dot{n}_e - \frac{\partial q}{\partial x}, \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \dot{n}_d - \dot{n}_e$$

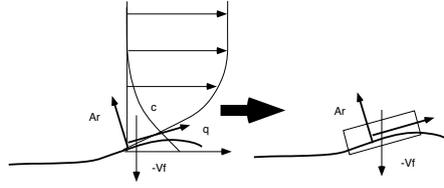


FIG. 3 – Dans un écoulement avec érosion et sédimentation, la concentration  $c$  en suspension tombe par sédimentation, elle est générée par l'érosion (notée  $A_r$ , i.e.  $\dot{n}_e$ ).

Cette équation sert de base à d'autres simplifications. Manifestement, on peut en première approximation dire que  $n$  est à peu près proportionnel à la concentration au fond :  $n = hc(x, 0)$ ,  $h$  constante. De même,  $q = \int_0^\infty c u dy$  est est à peu près proportionnel à la concentration au fond et donc à  $n$  :  $q = \gamma hn$ ,  $\gamma$  constante. La déposition est ainsi proportionnelle à la concentration moyenne en solution, et donc au flux  $\dot{n}_d = V_f q / (h^2 \gamma)$ . L'érosion est choisie en supposant que l'érosion est proportionnelle à l'écart du frottement au seuil. Ce choix est tel qu'à l'équilibre stationnaire et invariant par translation (lorsque l'érosion est exactement compensée par la déposition  $\dot{n}_d - \dot{n}_e = 0$ ) on obtienne que le flux qui circule est exactement le flux saturé,  $q_s = q_0 ((S - S_s)_+)^{\beta}$ . Donc on prend ( $Q_0 = (V_f / \gamma h^2) q_0$ ) :

$$\dot{n}_e = \left( \frac{V_f}{\gamma h^2} \right) q_0 ((S - S_s)_+)^{\beta},$$

L'équation de  $q$  est alors

$$\left( \frac{h}{V_f} \right) \frac{\partial q}{\partial t} + \left( \frac{\gamma h^2}{V_f} \right) \frac{\partial q}{\partial x} + q = q_0 ((S - S_s)_+)^{\beta}$$

En général, le temps mis en jeu est très lent, et l'équation s'écrit :

$$l_s \frac{\partial q}{\partial x} + q = q_0 ((S - S_s)_+)^{\beta}$$

L'interprétation de cette équation est qu'il faut une certaine distance  $l_s = \frac{\gamma h^2}{V_f}$  avant que le flux saturé ne soit atteint.

Cette formule peut se résumer par les phrases de du Boys, 1879. Commentant la vitesse limite d'entraînement évoquée par ces prédécesseurs, il évoque la

notion de saturation de flux en ces termes “ *une fois une certaine quantité de matières en mouvement sur le fond du lit, la vitesse des filets liquides devient trop faible pour entraîner davantage : le cours d'eau est alors saturé. L'existence d'une longueur de saturation est traduite par : un cours d'eau non saturé tend à le devenir en entraînant une partie des matériaux qui composent son lit, et en choisissant de préférence les plus petits.*”

Dans le cas où le temps d'érosion est très lent, on remarque incidemment que l'équation de l'évolution du fond s'écrit aussi (équation d'Exner 1925) :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}.$$

#### 7.5.4 Résolution couplée simplifiée

Se donnant une première forme de fond  $f(x, t = 0)$ , on doit suivre la démarche suivante :

- calcul de l'écoulement par résolution des équations de Navier Stokes incompressibles stationnaires, à viscosité constante, obtention de  $\tau$  le frottement au fond :

$$f \rightarrow \tau, \quad \text{par NS}$$

- calcul du transport des sédiments par la relation intégrale simplifiée :

$$\tau \rightarrow q, \quad \text{par } l_s \frac{\partial q}{\partial x} + q = q_s, \quad \& \quad q_s = q_0((\tau - \tau_s)_+)^{\beta}$$

- calcul du nouveau fond après érosion et sédimentation par actualisation du fond,

$$q \rightarrow f, \quad \text{par l'équation dite d'Exner : } \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x}.$$

On voit qu'il s'agit d'un problème couplé, mais moins que le précédent. Ce type de formulation permet le calcul du déplacement de dunes éoliennes ou sous marines.

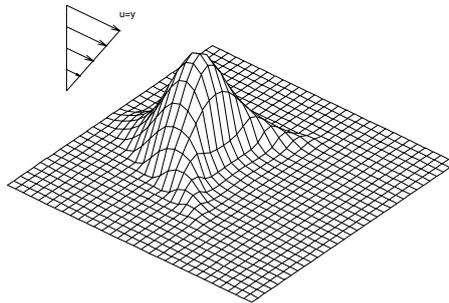


FIG. 4 – Un exemple de "dune" numérique. Solution 3D des équations simplifiées dans le cas d'un écoulement cisailé.

## 7.5. Conclusion

- retenons la loi de Fick.
- retenons l'analogie formelle (dans le cadre des simplifications faites) entre la diffusion de la masse et l'équation de la chaleur et les nouveaux nombres sans dimensions.
- les écoulements avec réactions chimiques sont très complexes et n'ont été qu'à peine déflorés.
- les écoulements avec érosion et sédimentation, très complexes eux aussi.

## 7.5 Bibliographie <sup>1</sup>

- H. Gersten & H. Herwig (1992) "Strömungsmechanik" Ed. Viewig.
- J. Fredsøe and R. Deigaard (1992), "Mechanical of coastal sediment transport," Advanced Series on Ocean Engineering World Scientific, Singapore, Vol. 3.
- P.-Y. Lagrée, cours ENSTA, Transferts de masse.
- L. Landau & E. Lifshitz (1989) "Mécanique des fluides" ed MIR.
- A. Leontiev (1985) "Théorie des échanges de chaleur et de masse" ed. MIR.
- P. Nielsen (1992), "Coastal bottom boundary layers and sediment transport," Advanced Series on Ocean Engineering World Scientific, Singapore, Vol. 4.
- C.T. Yang, Sediment Transport : Theory and Practice McGraw-Hill, NewYork, 1995, p. 480.

---

<sup>1</sup> 11/10