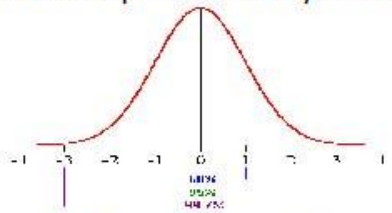
Ecole Superieure de Technologie d'AGADIR

Cours de statistiques et d'analyse de données



Prof. Omar Boutéglifine

statesta2012@gmail.com

Partie II :

analyse factorielle des correspondances (AFC)

L'analyse factorielle des correspondances

But On cherche à décrire la liaison entre *deux* variables qualitatives.

Exemple on peut regarder la répartition de la couleur des yeux en fonction de la couleur des cheveux.

Différence avec l'ACP l'ACP se fait dans un cadre différent ; les variables sont quantitatives et donc

- il est possible de faire des opérations mathématiques sur les valeurs des variables ;
- par contre, il n'est en général pas possible de compter les individus qui ont une caractéristique donnée (taille=1,83m)

Pourquoi deux variables ? le cas de plus de deux variables est l'analyse de correspondance multiples, traité plus tard dans le cours.

Variables qualitatives

Soit $\mathcal{X}$ une variable qualitative. On dispose d'un échantillon de n individus sur lesquels la variable est mesurée.

Modalités (ou catégories) les valeurs que peut prendre une variable qualitative ; si la variable a r modalités (valeurs possibles), on note x_i , $1 \leq i \leq r$, ces modalités.

Effectif le nombre d'occurrence de la modalité x_i dans l'échantillon ; on le note n_i, et on a $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$.

Fréquence c'est la grandeur $f_i = n_i/n$; la somme des fréquences sur les modalités est 1. On utilise souvent le pourcentage $100 f_i$.

Représentation on peut utiliser un tableau avec r lignes de la forme

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	n_i	f_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Tableau de contingence

Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux variables qualitatives à r et s modalités respectivement décrivant un ensemble de n individus.

Définition le tableau de contingence est une matrice à r lignes et s colonnes renfermant les effectifs n_{ij} d'individus tels que $\mathcal{X} = x_i$ et $\mathcal{Y} = y_i$.

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & \cdots & n_{1s} \\ n_{21} & n_{22} & & \\ & \ddots & & \\ \vdots & & n_{ij} & \vdots \\ & & & \ddots \\ n_{r1} & & & n_{rs} \end{pmatrix}$$

La constitution de ce tableau est ce que les praticiens des enquêtes appellent un « tri croisé ».

Marges et profils

Marge en ligne c'est la somme $n_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{s} n_{ij}$, c'est-à-dire l'effectif total de la modalité x_i de $\mathcal{X}$.

On définit aussi le profil marginal des lignes $n_{i\cdot}/n$.

Marge en colonne c'est la somme $n_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{r} n_{ij}$, c'est-à-dire l'effectif total de la modalité y_j de $\mathcal{Y}$.

On définit aussi le profil marginal des colonnes $n_{\cdot j}/n$.

Deux lectures possibles selon la variable que l'on privilégie, on peut définir

- le tableau des *profils-lignes* $n_{ij}/n_{i\cdot}$, qui représente la fréquence de la modalité y_j conditionnellement à $\mathcal{X} = x_i$; la somme de chaque ligne est ramenée à 100%.
- le tableau des *profils-colonnes* $n_{ij}/n_{\cdot j}$, qui représente la fréquence de la modalité x_i conditionnellement à $\mathcal{Y} = y_j$; la somme de chaque colonne est ramenée à 100%.

Propriétés des profils

Moyenne la moyenne des profils-lignes (avec poids correspondant aux profils marginaux des lignes) est le profil marginal des colonnes :

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{n_{i\cdot}}{n} \times \frac{n_{ij}}{n_{i\cdot}} = \frac{n_{\cdot j}}{n},$$

et de même pour les colonnes $\sum_{j=1}^{s} \frac{n_{\cdot j}}{n} \times \frac{n_{ij}}{n_{\cdot j}} = \frac{n_{i\cdot}}{n}$.

Indépendance empirique lorsque tous les profils lignes sont identiques, il y a indépendance entre $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$, puisque la connaissance de $\mathcal{X}$ ne change pas la répartition de $\mathcal{Y}$. On a pour tout j

$$\frac{n_{1j}}{n_{1\cdot}} = \frac{n_{2j}}{n_{2\cdot}} = \cdots = \frac{n_{rj}}{n_{r\cdot}} = \frac{n_{1j} + \cdots + n_{rj}}{n_{1\cdot} + \cdots + n_{r\cdot}} = \frac{n_{\cdot j}}{n}$$

et donc $n_{ij} = \frac{n_{i\cdot} n_{\cdot j}}{n}$.

Le χ^2 d'écart à l'indépendance

Définition c'est la grandeur suivante, aussi notée χ^2 ou X^2

$$d^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \frac{\left(n_{ij} - \frac{n_{i\cdot}n_{\cdot j}}{n}\right)^2}{\frac{n_{i\cdot}n_{\cdot j}}{n}} = n\left[\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{n_{ij}^2}{n_{i\cdot}n_{\cdot j}} - 1\right].$$

$d^2 = 0 \iff$ les variables sont indépendantes.

Borne supérieure comme $n_{ij} \leq n_{i\cdot}$, on a

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{n_{ij}^2}{n_{i\cdot}n_{\cdot j}} \leq \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\frac{n_{ij}}{n_{\cdot j}} = \sum_{j=1}^{s}\frac{\sum_{i=1}^{r} n_{ij}}{n_{\cdot j}} = \sum_{j=1}^{s}\frac{n_{\cdot j}}{n_{\cdot j}} = s,$$

et donc $d^2 \leq n(s-1)$. On fait de même pour r et

$$\varphi^2 = \frac{d^2}{n} \leq \min(s-1, r-1).$$

Caractère significatif du χ^2

Problème à partir de quelle valeur de d^2 doit-on considérer que les variables $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont indépendantes ?

Méthode on suppose que $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont issus de tirages de deux variables aléatoires indépendantes. On peut alors montrer que d^2 est une réalisation d'une variable aléatoire D^2 qui suit une loi $\chi^2_{(r-1)(s-1)}$.

Définition Loi du khi-deux à p degrés de libertés χ^2_p est la loi de la variable $\sum_{i=1}^{p} U_i^2$, où les U_i sont des variables gaussiennes réduites indépendantes.

Le test du χ^2 on se fixe un risque d'erreur α (0.01 ou 0.05 en général) et on calcule la valeur d_c^2 telle que $\mathrm{P}\left(\chi^2_{(r-1)(s-1)} > d_c^2\right) = \alpha$. Si $d^2 > d_c^2$ on considère que l'événement est trop improbable et que donc que l'hypothèse originale d'indépendance doit être rejetée. On trouvera en général ces valeurs dans une table précalculée.

Cas p grand quand $p > 30$, on considère que $\sqrt{2\chi^2_p} - \sqrt{2p-1}$ est distribué comme une variable gaussienne centrée réduite $N(0,1)$.

Le χ^2 d'écart à l'indépendance (suite)

Dépendance fonctionnelle si $\varphi^2 = s - 1$, alors pour chaque i soit $n_{ij} = n_{i\cdot}$, soit $n_{ij} = 0$: il existe une unique case non nulle par ligne. $\mathcal{Y}$ est donc fonctionnellement liée à $\mathcal{X}$.

Dépendance inverse cette relation ne signifie pas que $\mathcal{X}$ est fonctionnellement liée à $\mathcal{Y}$, sauf si $r = s$. On peut alors représenter le tableau comme une matrice diagonale.

Contribution au χ^2 c'est le terme

$$\frac{\left(n_{ij} - \frac{n_{i\cdot}n_{\cdot j}}{n}\right)^2}{\frac{n_{i\cdot}n_{\cdot j}}{n}}$$

qui permet de mettre en évidence les associations significatives entre catégories de deux variables.

Analyse des correspondances de deux variables : les données

Effectifs on a un tableau de contingence $\mathbf{N}$ à m_1 lignes et m_2 colonnes résultant du croisement de deux variables qualitatives $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$ à m_1 et m_2 modalités respectivement. On note $\mathbf{D}_1$ et $\mathbf{D}_2$ les matrices diagonales des effectifs marginaux

$$\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} n_{1\cdot} & & 0 \\ & n_{2\cdot} & \\ & & \ddots \\ 0 & & n_{m_1\cdot} \end{pmatrix} \quad \mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} n_{\cdot 1} & & 0 \\ & n_{\cdot 2} & \\ & & \ddots \\ 0 & & n_{\cdot m_2} \end{pmatrix}$$

Profils le tableau des profils des lignes $n_{ij}/n_{i\cdot}$ est donné par $\mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{N}$ et celui des profils des colonnes $n_{ij}/n_{\cdot j}$ par $\mathbf{N}\mathbf{D}_2^{-1}$.

Représentation géométrique des profils

Nuage de points les profils-lignes forment un nuage de m_1 points de $\mathbb{R}^{m_2}$. Chaque point est affecté d'un poids égal à sa fréquence marginale $n_{i\cdot}/n$, et la matrice des poids est donc $\frac{1}{n}\mathbf{D}_1$.

Centre de gravité c'est le profil marginal car

$$\mathbf{g}_\ell = \frac{1}{n}(\mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{N})'\mathbf{D}_1\mathbf{1}_{m_1} = \left(\frac{n_{\cdot 1}}{n}, \cdots, \frac{n_{\cdot m_2}}{n}\right)'$$

Profils-colonnes les lignes du tableau $\mathbf{D}_2^{-1}\mathbf{N}'$ forment un nuage de m_2 points de $\mathbb{R}^{m_1}$, avec matrice de poids $\frac{1}{n}\mathbf{D}_2$ et centre de gravité

$$\mathbf{g}_c = \left(\frac{n_{1\cdot}}{n}, \cdots, \frac{n_{m_1\cdot}}{n}\right)'$$

La métrique du χ^2

Profils-lignes la distance entre deux profils-lignes i et i' est

$$d^2_{\chi^2}(i,i') = \sum_{j=1}^{m_2} \frac{n}{n_{\cdot j}}\left(\frac{n_{ij}}{n_{i\cdot}} - \frac{n_{i'j}}{n_{i'\cdot}}\right)^2,$$

ce qui revient à utiliser la métrique diagonale $n\mathbf{D}_2^{-1}$.

Inertie l'inertie totale du nuage des profils-lignes par rapport à $\mathbf{g}_\ell$ est

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{g}_\ell} &= \sum_{i=1}^{m_1} \frac{n_{i\cdot}}{n} d^2_{\chi^2}(i,\mathbf{g}_\ell) = \sum_{i=1}^{m_1}\sum_{j=1}^{m_2} \frac{n_{i\cdot}}{n_{\cdot j}}\left(\frac{n_{ij}}{n_{i\cdot}} - \frac{n_{\cdot j}}{n}\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{m_1}\sum_{j=1}^{m_2} \frac{1}{n_{i\cdot}n_{\cdot j}}\left(n_{ij} - \frac{n_{i\cdot}n_{\cdot j}}{n}\right)^2 = \varphi^2 \end{aligned}$$

Cette inertie mesure donc l'écart à l'indépendance.

Comment étudier ces données

Cas indépendant en cas d'indépendance empirique, on aura

$$\frac{n_{ij}}{n_{i\cdot}} = \frac{n_{\cdot j}}{n} \text{ et } \frac{n_{ij}}{n_{\cdot j}} = \frac{n_{i\cdot}}{n}$$

et les deux nuages sont alors réduits à leurs centres de gravité respectifs.

Dimension des nuages comme les profils somment à 1, les m_1 profils-lignes sont situés dans le sous-espace W_1 de dimension $m_2 - 1$ défini par $\sum_{j=1}^{m_2} x_j = 1$ et $x_j \geq 0$.

ACP l'étude de la forme des nuages au moyen de l'Analyse en Composantes Principales permettra de rendre compte de la structure des écarts à l'indépendance.

Pourquoi la métrique du χ^2 ?

Pondération la pondération $n/n_{\cdot j}$ permet de donner des importances comparables aux différentes « variables ».

Équivalence distributionnelle si deux colonnes j et j' de $\mathbf{N}$ ont le même profil, il est logique de les regrouper en une seule d'effectif $n_{ij} + n_{ij'}$; on a alors quand $n_{ij}/n_{\cdot j} = n_{ij'}/n_{\cdot j'}$

$$\begin{aligned} &\frac{n}{n_{\cdot j}}\left(\frac{n_{ij}}{n_{i\cdot}} - \frac{n_{\cdot j}}{n}\right)^2 + \frac{n}{n_{\cdot j'}}\left(\frac{n_{ij'}}{n_{i\cdot}} - \frac{n_{\cdot j'}}{n}\right)^2 \\ &\qquad = \frac{n}{n_{\cdot j} + n_{\cdot j'}}\left(\frac{n_{ij} + n_{ij'}}{n_{i\cdot}} - \frac{n_{\cdot j} + n_{\cdot j'}}{n}\right)^2 \end{aligned}$$

La distance entre les profils-ligne est donc inchangée.

Autres propriétés de la métrique du χ^2

Propriétés de $\mathbf{g}_\ell$ le vecteur $\mathbf{Og}_\ell$ est orthogonal à W_1 au sens de la métrique du χ^2 car, pour tout $\mathbf{x} \in W_1$,

$$\langle \mathbf{g}_\ell \mathbf{x}, \mathbf{Og}_\ell \rangle_{\chi^2} = (\mathbf{x} - \mathbf{g}_\ell)' n \mathbf{D}_2^{-1} \mathbf{g}_\ell = (\mathbf{x} - \mathbf{g}_\ell)' \mathbf{1}_{m_2} = 0.$$

et la norme de $\mathbf{g}_\ell$ est $\|\mathbf{g}_\ell\|^2_{\chi^2} = \mathbf{g}_\ell' n \mathbf{D}_2^{-1} \mathbf{g}_\ell = \mathbf{g}_\ell' \mathbf{1}_{m_2} = 1$.

Tous les vecteurs centrés du nuages sont donc orthogonaux à $\mathbf{g}_\ell$

Profils-colonnes on définit la distance entre deux profils-colonnes j et j' comme

$$d^2_{\chi^2}(j, j') = \sum_{i=1}^{m_1} \frac{n}{n_{i.}} \left(\frac{n_{ij}}{n_{.j}} - \frac{n_{ij'}}{n_{.j'}} \right)^2,$$

ce qui correspond à une métrique de matrice $n\mathbf{D}_1^{-1}$. Ses propriétés sont similaires à celles sur les profils-lignes.

Vecteurs propres de $\mathbf{VM}$ – Centrage

$\mathbf{g}$ est un facteur principal $\mathbf{g}$ est vecteur propre de $\mathbf{VM}$ associé à la valeur propre 0 car, comme $\mathbf{g}$ est χ^2-orthogonal à W,

$$\mathbf{VMg} = (\mathbf{X} - \mathbf{1g}')' \mathbf{D} (\mathbf{X} - \mathbf{1g}') \mathbf{Mg} = \mathbf{0},$$

et on a donc $\mathbf{X'DXMg} = \mathbf{VMg} + \mathbf{gg'Mg} = \mathbf{0} + \mathbf{g}\|g\|_{\chi^2} = \mathbf{g}$.

Autres axes les autres valeurs et vecteurs propres de $\mathbf{VM}$ et $\mathbf{X'DXM}$ sont identiques car, pour tout vecteur $\mathbf{u} \perp \mathbf{g}$

$$\mathbf{X'DXMu} = \mathbf{VMu} + \mathbf{gg'Mu} = \mathbf{VMu} + \mathbf{g}\langle \mathbf{g}, \mathbf{u} \rangle_{\chi^2} = \mathbf{VMu}.$$

Centrage il est inutile de centrer les tableaux de profil ; on effectue une ACP non centrée et on élimine la valeur propre 1 associée à l'axe principal $\mathbf{g}$ et au facteur principal $\mathbf{Mg} = \mathbf{1}$.

ACP des deux nuages de profils

Il y a deux possibilités qui sont en dualité exacte

Profils-lignes
- tableau de données $\mathbf{X} = \mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{N}$;
- métrique $\mathbf{M} = n\mathbf{D}_2^{-1}$;
- poids $\mathbf{D} = \frac{\mathbf{D}_1}{n}$.

Profils-colonnes
- tableau de données $\mathbf{X} = \mathbf{D}_2^{-1}\mathbf{N}'$;
- métrique $\mathbf{M} = n\mathbf{D}_1^{-1}$;
- poids $\mathbf{D} = \frac{\mathbf{D}_2}{n}$.

Autres données
- Centre de gravité $\mathbf{g} = \mathbf{X'D1}$.
- Matrice de variance-covariance

$$\mathbf{V} = \mathbf{X'DX} - \mathbf{gg}' = (\mathbf{X} - \mathbf{1g}')' \mathbf{D} (\mathbf{X} - \mathbf{1g}')$$

Calcul de l'ACP

On fait d'abord le calcul pour les profils-lignes.

Facteurs principaux ils sont vecteurs propres de

$$\mathbf{MX'DX} = (n\mathbf{D}_2^{-1})(\mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{N})' \frac{\mathbf{D}_1}{n} (\mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{N}) = \mathbf{D}_2^{-1}\mathbf{N}'\mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{N}.$$

On a donc pour chaque axe principal k

$$\mathbf{D}_2^{-1}\mathbf{N}'\mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{N}\mathbf{u}_k = \lambda_k \mathbf{u}_k$$

Composantes principales la composante principale associée au facteur $\mathbf{u}_k$ est $\mathbf{a}_k = \mathbf{X}\mathbf{u}_k = \mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{N}\mathbf{u}_k$; elle est vecteur propre de la matrice $\mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{N}\mathbf{D}_2^{-1}\mathbf{N}'$ car

$$\mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{N}\mathbf{D}_2^{-1}\mathbf{N}'\mathbf{a}_k = \mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{N}\mathbf{D}_2^{-1}\mathbf{N}'\mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{N}\mathbf{u}_k = \lambda_k \mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{N}\mathbf{u}_k = \lambda_k \mathbf{a_k}$$

Profils-colonnes on échange les indices 1 et 2 et on transpose $\mathbf{N}$.

Comparaison lignes-colonnes

	ACP profils-lignes	*ACP profils-colonnes*
Facteurs principaux	Vecteurs propres de $\mathbf{D}_2^{-1}\mathbf{N}'\mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{N}$	Vecteurs propres de $\mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{N}\mathbf{D}_2^{-1}\mathbf{N}'$
Composantes principales	Vecteurs propres de $\mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{N}\mathbf{D}_2^{-1}\mathbf{N}'$ normalisés par $\mathbf{a}_k'\frac{\mathbf{D}_1}{n}\mathbf{a}_k = \lambda_k$	Vecteurs propres de $\mathbf{D}_2^{-1}\mathbf{N}'\mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{N}$ normalisés par $\mathbf{b}_k'\frac{\mathbf{D}_2}{n}\mathbf{b}_k = \lambda_k$

Comparaison les deux analyses conduisent aux mêmes valeurs propres et les facteurs principaux de l'une sont les composantes principales de l'autre (à un facteur près).

Contributions à l'inertie

Contribution des profils-lignes On sait que $\lambda_k = \sum_{i=1}^{m_1} \frac{n_{i\cdot}}{n}(a_{ki})^2$, où a_{ki} est la coordonnée du profil-ligne i sur la $k$ième composante principale de l'ACP sur les profils-lignes. On définit donc la contribution de i à l'axe principal k comme

$$\frac{n_{i\cdot}}{n}\cdot\frac{(a_{ki})^2}{\lambda_k}.$$

On considérera les catégories ayant les influences les plus importantes (typiquement $> \alpha n_{i\cdot}/n$, $\alpha = 2$ ou 3) comme constitutives des axes ; on regardera aussi le signe de la coordonnée.

Il n'y a pas ici de modalités sur-représentées, puisqu'on ne peut pas les retirer.

Contribution des profils-colonnes pour les mêmes raisons, la contribution du profil-colonne k est

$$\frac{n_{\cdot j}}{n}\cdot\frac{(b_{kj})^2}{\lambda_k}.$$

Interprétation des résultats

Coordonnées des points Les coordonnées des points-lignes et points-colonnes s'obtiennent en cherchant les vecteurs propres des produits des deux tableaux de profils. Ce sont les grandeurs principales à obtenir.

Projection des nuages il est possible de projeter les deux nuages de points sur le même représentations. On justifiera plus tard le sens de cette représentation et son interprétation.

Cercle des corrélations il n'a aucun intérêt ici, puisque les véritables variables sont qualitatives.

(non) effet de taille comme les composantes variables sont centrées ($\sum_{i=1}^{m_1} n_{i\cdot}a_{ki} = \sum_{j=1}^{m_2} n_{\cdot j}b_{kj} = 0$), ont sait que les coordonnées des $\mathbf{a}_k$ et $\mathbf{b}_k$ ne peuvent être toutes de même signe ; il n'y a donc jamais d'effet de « taille ».

Qualité de la représentation

Profils-lignes l'AFC est une ACP, et on peut donc mesurer la qualité de la représentation d'un point (un profil-ligne) par un plan factoriel. La qualité (le $\cos^2$ de l'angle entre le point et sa projection) s'écrit encore, pour le plan formé des q premiers axes :

$$\frac{\sum_{k=1}^{q}(a_{ki})^2}{\sum_{k=1}^{m_2}(a_{ki})^2}.$$

Comme pour l'ACP, > 0.8 signifie « très bien représenté » et < 0.5 veut dire « mal représenté ». Les valeurs sont souvent données en 10000è.

Profils-colonne Le principe est le même, mais la formule devient :

$$\frac{\sum_{k=1}^{q}(b_{ki})^2}{\sum_{k=1}^{m_1}(b_{ki})^2}.$$

Formules de transition

But on cherche une relation entre les vecteurs $\mathbf{a}_k$ et $\mathbf{b}_k$ pour éviter de faire deux diagonalisation de matrices. Par exemple, si $m_1 < m_2$, on diagonalisera la matrice $\mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{N}\mathbf{D}_2^{-1}\mathbf{N}'$.

Formules un calcul simple donne les formules suivantes

$$\mathbf{b}_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\mathbf{D}_2^{-1}\mathbf{N}'\mathbf{a}_k, \text{ soit } b_{kj} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\sum_{i=1}^{m_1}\frac{n_{ij}}{n_{.j}}a_{ki},$$

$$\mathbf{a}_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{N}\mathbf{b}_k, \text{ soit } a_{ki} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\sum_{j=1}^{m_2}\frac{n_{ij}}{n_{i.}}b_{kj}.$$

Méthode comme $\mathbf{a}_k$ est (à une normalisation près) le facteur principal associé à $\mathbf{b}_k$, on sait que $\mathbf{b}_k = \alpha\mathbf{D}_2^{-1}\mathbf{N}'\mathbf{a}_k$. Pour déterminer α, il suffit d'écrire que $\mathbf{b}_k'\frac{\mathbf{D}_2}{n}\mathbf{b}_k = \lambda_k$.

Décomposition de l'inertie

φ^2 et valeurs propres on sait que l'inertie totale (et donc la somme des valeurs propres) est égale à φ^2. Comme il y a au plus $\min(m_1 - 1, m_2 - 1)$ valeurs propres, on obtient si $m_1 < m_2$

$$\varphi^2 = \sum_{k=1}^{m_1-1}\lambda_k.$$

Choix du nombre de valeurs propres c'est un problème plus difficile

- la règle de Kaiser $\lambda_k > \varphi^2/(m-1)$ s'applique mal ;
- la règle du coude reste valide, mais est un peu subjective ;
- on peut s'aider de la part d'inertie expliquée, mais c'est un peu compliqué.

APPLICATION MANUELLE

On considère le tableau suivant qui donne la répartition de la situation professionnelle selon la région au Maroc (données fictives en 100000). Faire une analyse factorielle des correspondances.

Région	Fonctionnaires	Professions libérales	Chômeurs
Nord	22	10	25
Centre	30	40	30
Est	10	8	10
Sud	18	20	15